ИНДУКЦИЈА И НИЗОВИ

1. Доказати Бернулијеву неједнакост: $(1+h)^n \geq 1+nh,\ n\in N,\ h>-1.$

Дефиниција: Аритметичка средина бројева $\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ **је** $\boldsymbol{A_n = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}}$.

Дефиниција: Геометријска средина ненегативних бројева $\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ **је** $\boldsymbol{G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}$.

2. Доказати да за $n\in N$ важи неједнакост: $A_n \geq G_n$. Када је задовољена једнакост?

3. Доказати да за $a,b\in R^+$ и $n\geq 2$ важи неједнакост: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}$.

4. Ако је $a+b+c=1,\ \left(a,b,c\in R^+\right)$, онда је $(1-a)(1-b)(1-c)\geq 8abc$. Доказати. За које вредности $a,\ b,\ c$ важи једнакост?

5. Ако је $a+b+c=1$ и $a,b,c\geq -\frac{1}{4}$, онда је $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\leq 5$. Доказати.

6. Доказати неједнакост: $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^8 \geq 64ab(a+b)^2$.

7. Показати да ако је $f(x)=x^2$, онда разлике $f(x+1)-f(x),\ f(x+2)-f(x+1),\ f(x+3)-f(x+2),\ldots$ чине аритметички низ.

8. Ако је $(a_n)_{n\in N}$ аритметички низ чији ниједан члан није једнак нули, онда је за све $n\in N$
$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$. Доказати.

9. Ако је $(a_n)_{n\in N}$ аритметички низ са позитивним члановима, онда је
$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$. Доказати.

10. Израчунати збир: $\frac{\sin 1}{\cos 0\cdot\cos 1}+\frac{\sin 1}{\cos 1\cdot\cos 2}+\ldots\ldots+\frac{\sin 1}{\cos(n-1)\cdot\cos n}$.

11. Израчунати збир: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$.

12. Израчунати суме:

i) $S_1=1+2+3+\ldots+n$;

ii) $S_2=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$;

iii) $S_3=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$.

13. Доказати да је у таблици

$$\begin{array}{l} 1 \\ 2,3,4 \\ 3,4,5,6,7 \\ 4,5,6,7,8,9,10 \\ 5,6,7,8,9,10,11,12,13 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

збир чланова у свакој врсти једнак квадрату средњег члана.

14. Израчунати збир n бројева облика: 1, 11, 111, 1111, ...

15. Одредити збир $S_{n+1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + (n+1)x^n$.

16. Странице троугла образују геометријски низ.

i) Доказати да количник q тог низа задовољава неједнакост $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

ii) Одредити q тако да троугао буде правоугли.

17. Ако су $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ (\alpha < \beta < \gamma)$ углови троугла и ако је низ $\left(tg\frac{\alpha}{2},\ tg\frac{\beta}{2},\ tg\frac{\gamma}{2}\right)$ аритметички, онда је аритметички и низ $(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$.

18. Ако котангенси углова троугла чине аритметички низ, онда и квадрати страница тог троугла чине аритметички низ. Доказати.

19. Написати у тригонометријском облику комплексне бројеве $a,\ b,\ c,\ d$, ако је $a = \sqrt{2}$, $d = 4i$ и ако њихови аргументи чине аритметички, а модули геометријски низ.

20. *(општинско 1998/99.-IV-Б/2.)* У једнакостранични троугао странице a уписан је круг. У тај круг уписан је нови једнакостранични троугао. У добијени троугао уписан је нови круг итд. Одредити збир површина свих кругова.

21. *(општинско 1998/99.-IV-А/2.)* Уколико $\log_2(3^x - 1)$, $\log_4(9 + 9^x - 7\cdot 3^x)$ и $\log_2(3 - 3^x)$ чине узастопне чланове аритметичке прогресије, одредити x.

22. *(општинско 1998/99.-IV-А/3.)* Доказати једнакост

$$1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} = \begin{cases} 2^2 + 4^2 + \ldots + \left(2\cdot\frac{n}{2}\right)^2, & \text{за } n \text{ парно} \\ 1^2 + 3^2 + \ldots + \left(2\cdot\frac{n+1}{2} - 1\right)^2, & \text{за } n \text{ непарно} \end{cases}.$$

23. *(окружно 1998/99.-IV-Б/4.)* Наћи све аритметичке прогресије са разликом $d = 2$ код којих односи $S_{5n} : S_n$ збира првих $5n$ и првих n сабирака не зависе од n.

24. *(окружно 1998/99.-III -А/4.)* Задати су позитивни бројеви $x_1, \ldots, x_n$ који чине аритметичку прогресију са разликом d. Доказати да је $S = \frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} + \frac{d}{x_1x_2} + \frac{d}{x_2x_3} + \ldots + \frac{d}{x_{n-1}x_n} + \frac{d^2}{x_1x_2x_3} + \ldots + \frac{d^2}{x_{n-2}x_{n-1}x_n} + \ldots + \frac{d^{n-1}}{x_1x_2\ldots x_n} = \frac{n}{x_1}$, где су узети сви могући производи елемената $x_1, \ldots, x_n$.