ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПРВОГ РЕДА $F(x,y,y')=0$

🕮 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА КОЈА РАЗДВАЈА ПРОМЕНЉИВЕ $y'=f(x)g(y)$

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$$

<u>ПРИМЕРИ</u>:

1. $x+xy+y'(y+xy)=0$

2. $yy'-x=0$

3. $\frac{x}{y}=\frac{y'}{x+1}$

4. $(xy-x)dx+(xy+x-y-1)dy=0$

5. $\sqrt{1-x^2}dy+\sqrt{1-y^2}dx=0$

6. $2\sqrt{x}dy=ydx, \quad y(4)=1$

7. $e^y(y'+1)=1, \quad y(0)=\ln 2$

8. $y'\sin x=y\ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

9. $y-xy'=a\left(1+x^2y'\right), \quad y(1)=1$

🕮 ХОМОГЕНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$

сменом $t(x)=\frac{y(x)}{x} \Leftrightarrow y(x)=x\cdot t(x)$ своди се на једначину која раздваја променљиве

<u>ПРИМЕРИ</u>:

1. $xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}$

2. $\frac{ds}{dt}=\frac{s}{t}-\frac{t}{s}$

3. $x^2+y^2-2xyy'=0$

4. $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$

5. $xy'-y=(x+y)\ln\frac{x+y}{x}$

Следеће једначине свести на хомогене (транслацијом координатног система) и наћи њихово опште решење:

6. $y'=\frac{x-y+1}{x+y-3}$

7. $(2x-4y+6)dx+(x+4y-3)dy=0$

8. $x-y-1+(y-x+2)y'=0$

9. $y'=2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$

10. $(y'+1)\ln\frac{y+x}{x+3}=\frac{y+x}{x+3}$

🕮 ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА $y'+p(x)y=q(x)$

Решава се сменом $y(x)=u(x)\cdot v(x)$ на следећи начин: $y'=u'v+uv' \quad \Rightarrow$

$$u'v+v'u+p(x)uv=g(x) \quad \Rightarrow \quad uv'+v\underbrace{\left(u'+p(x)u\right)}_{0}=g(x) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u'+p(x)u=0 \\ uv'=g(x) \end{cases}$$

<u>ПРИМЕРИ</u>:

1. $xy'-2y=2x^4$

2. $y'+y+x=0$

3. $y'-y=e^x$

4. $y'+\frac{y}{x+1}+x^2=0$

5. $y'+y\cos x=\sin x\cos x$

6. $y'-\frac{2}{x+1}y=\left(x+1\right)^3$

7. Наћи ону интегралну криву једначине $\left(1-x^2\right)y'-xy-1=0$ која пролази кроз тачку (0,1).

8. $xy'-\frac{y}{x+1}=x, \quad y(1)=-1$

🕮 БЕРНУЛИЈЕВА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА $y'+p(x)y=q(x)y^{\alpha}$

Сменом $z=y^{1-\alpha}$ своди се на линеарну, али може да се интеграли и непосредно сменом $y=uv$.

ПРИМЕРИ:

1. $y'+2xy=2x^3y^3$

2. $y'-\frac{y}{x+1}+y^2=0$

3. $y'+\frac{2y}{x}=\frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$

4. $xy'+y=y^2\ln x$

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ВИШЕГ РЕДА $F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0$

🕮 ЈЕДНАЧИНЕ ОБЛИКА $y^{(n)}=f(x)$

Решава се *n* пута узастопном интеграцијом (сваки пут са новом константом)

ПРИМЕРИ:

1. $y''=xe^x \qquad \left(y'=\int xe^x dx=(x-1)e^x+c_1 \;\Rightarrow\; y=\int\left((x-1)e^x+c_1\right)dx=(x-2)e^x+c_1x+c_2 \right)$
2. $y'''=\sin x$
3. $y''=4\sin 2x, \quad y(0)=0, \; y'(0)=0$.
4. Задатак 391 из збирке

🕮 ЈЕДНАЧИНЕ ДРУГОГ РЕДА ОБЛИКА $F(x,y',y'')=0$

Ред им се снижава увођењем смене $z=y'$, па се своде на једначине првог реда

ПРИМЕРИ:

1. $\left(y'\right)^2=y''$
2. $\left(1-x^2\right)y''-xy'-2=0$
3. $y''+y'tgx-\sin 2x=0$
4. $y''+y'+x=0$

🕮 ЛИНЕАРНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ВИШЕГ РЕДА СА КОНСТАНТНИМ КОЕФИЦИЈЕНТИМА $a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+......+a_2y''+a_1y'+a_0y=0$

Решавају се снижавањем реда, аналогно растављању полинома на чиниоце. Наиме, ако су $r_1,r_2,r_3,......,r_{n-1},r_n$ решења одговарајуће алгебарске једначине $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+......+a_1x+a_0=0$**,** онда се сваком решењу придружује у зависности од његовог облика по једна функција на следећи начин:

- **Ако је $r_i \in R$ једноструко решење, онда му придружујемо функцију $y_i(x)=c_ie^{rx}$, где је $c_i \in R$ интеграциона константа.**

ПРИМЕР: $y'''-5y''+4y'=0$

Одговарајућа алгебарска једначина је $r^3-5r^2+4r=0 \Leftrightarrow r(r-1)(r-4)=0 \Leftrightarrow r_1=0 \vee r_2=1 \vee r_3=4$, па је опште решење диференцијалне једначине $y(x)=c_1e^{0x}+c_2e^{1x}+c_3e^{4x}=c_1+c_2e^x+c_3e^{4x}$

- **Ако је $r_i \in R$ решење вишеструкости k, онда се том решењу придружује k функција: $e^{r_i x}$, $xe^{r_i x}$, $x^2 e^{r_i x}$,......, $x^{k-1}e^{r_i x}$, а решење које му одговара је**
  $$y_i(x) = c_{i1}e^{r_i x} + c_{i2}xe^{r_i x} + c_{i3}x^2 e^{r_i x}, ..., c_{ik}x^{k-1}e^{r_i x}$$

ПРИМЕР: $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

Одговарајућа алгебарска једначина је $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^3 = 0 \Leftrightarrow r_{1,2,3} = 1$, па је опште решење диференцијалне једначине $y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$

- **Ако је $r_j = \alpha + \beta i \in C$ једноструко решење, онда му одговара функција $e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$, па је решење које јој одговара $y_j(x) = c_{j1}e^{\alpha x}\cos\beta x + c_{j2}e^{\alpha x}\sin\beta x$.**

ПРИМЕР: $y'' + y' + y = 0$

Одговарајућа алгебарска једначина је $r^2 + r + 1 = 0 \Leftrightarrow r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, па је опште решење диференцијалне једначине $y(x) = c_1 e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$

- **Ако је $r_j = \alpha + \beta i \in C$ вишеструко решење, онда имамо $e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$, $xe^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$, $x^2 e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$,...., па је решење које јој одговара**
  $$y_j(x) = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x + c_3 x e^{\alpha x}\cos\beta x + ... + c_{2k-1}x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x + c_{2k}x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

ПРИМЕР: $y^{IV} + 2y^{II} + y = 0$

Одговарајућа алгебарска једначина је $r^4 + 2r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (r^2+1)^2 = 0 \Leftrightarrow r_{1,2} = i \vee r_{3,4} = -i$, па је опште решење диференцијалне једначине $y(x) = c_1 e^{0x}\cos 1x + c_2 e^{0x}\sin 1x + c_3 x e^{0x}\cos 1x + c_4 x e^{0x}\sin 1x$, тј.
$y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + c_3 x\cos x + c_4 x\sin x$

ЗАДАЦИ:

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $y'' - 2y' + y = 0$
3. $y'' - 2y' + 2y = 0$
4. $y'' + 2y' + 3y = 0$
5. $y'' + 4y = 0$
6. $y''' - 8y = 0$
7. $y''' + y = 0$
8. $y^{iv} - a^4 y = 0$

9. Кретање материјалне тачке масе m дуж x осе под утицајем еластичне силе kx, где је k позитивна константа, и трења rx $(r = const)$, зове се слободно осцилаторно кретање. Једначина тога кретања гласи $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$. Наћи опште решење за разне вредности константи m, r и k.