ФУНКЦИЈЕ

1. Дата је функција $f\left(x\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+x^{n}}$, $x\geq 0$. Одредити нуле и знак функције $f\left(x\right)$, испитати монотонију, а затим нацртати њен график. (*2004/05, општинско 4.-АиБ/3.*)

2. Доказати да једначина $\sin\left(\dfrac{1}{7}\arccos x\right)=1$ нема реалних решења.

3. Наћи сва пресликавања $f:R\to R$, која су "на" и за која важи: $\left(\forall x,y\in R\right)\left(f\left(f\left(x-y\right)\right)=f\left(x\right)-f\left(y\right)\right)$. (*2004/05, општинско 4.-АиБ/2.*)

4. Дати су реални бројеви m и n, $mn<0$, $m+n\neq 0$ и функције $y=m\cdot 3^{x}+n$ и $y=n\cdot 3^{-x}+m$. Доказати да се графици ових двеју функција секу у двема тачкама, од којих је једна на апсцисној, а друга на ординатној оси. (*2001/02,окружно 4-Б/2.*)

5. Дата је функција $f:R\to R$ са: $f\left(x\right)=\begin{cases}x^{2}-4x+6, & x\leq 2\\ -x+4, & x>2\end{cases}$. Доказати да постоји њој инверзна функција, а затим је одредити. *(2000/01,општинско 4-Б/1.)*

6. Дата је реална функција $f\left(x\right)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, где су a,b,c,d, дати реални бројеви такви да је $ad-bc\neq 0$. Доказати да је ова функција једнака својој инверзној функцији ако и само ако важи $a+d=0$. *(2000/01, републичко 4-Б/2.)*

7. Дата је функција f која свакој тачки неке равни додељује по један реалан број. Познато је да је збир вредности ове функције у теменим ма ког правилног многоугла те равни једнак нули. Доказати да функција f има вредност 0 у свакој тачки. *(1999/2000, републичко 4-Б/1.)*

8. Одредити област вредности функције $f\left(x\right)=\dfrac{x^{2}-5x+7}{x^{2}-4x+3}$, $x\in R$, $x\notin\left\{1,3\right\}$. *(1998/99, општинско 4-Б/3.)*

9. Низ функција $f_{n}\left(x\right)$, $n\in N$ дефинисан је на следећи начин:

   $f_{1}\left(x\right)=\dfrac{x}{x-1}$, $f_{2}\left(x\right)=\dfrac{1}{1-x}$, $f_{n+2}\left(x\right)=f_{n+1}\left(f_{n}\left(x\right)\right)$, $n\in N$.

   Одредити $f_{2000}\left(x\right)$. *(1998/99, општинско 4-Б/5.)*

---

10. Нека су x_{1} и x_{2} решења једначине $x^{2}+ax+b=0$, $a,b\in Z$, а $f\left(x\right)$ произвољан полином са целобројним коефицијентима. Доказати да $f\left(x_{1}\right)+f\left(x_{2}\right)\in Z$.*(1989/90, општинско 4-2.)*

11. Шумар се налази $2\ km$ од пута. Аутомобил је паркирао $5\ km$ од тачке на путу најближе месту на коме се тренутно налази. Ако се шумар креће брзином од $3\ km/h$ кроз шуму и $4\ km/h$ путем, одредити путању којом би се кретао тако да најбрже стигне до свог аутомобила. *(1996/97, општинско 4-2.)*

12. Да ли је функција $f\left(x\right)=\cos\left(x\sqrt{7}\right)\cdot\cos x$ периодична? *(1997/98. општинско 4-Б/1.)*

13. Реални полином $P\left(x\right)$ четвртог степена има двоструку нулу $x=1$, а полином $Q\left(x\right)=P\left(x\right)+4$ има двоструку нулу $x=-1$. Ако је $Q\left(0\right)=-2$, одредити $P\left(x\right)$.*(1998/99. окружно 4-А/2.)*

14. Доказати да за све $x \in R^{+}$ важи $arctgx < x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$ *.(1998/99. републичко 4-Б/2.)*

15. На параболи $y^2 = 2x$ наћи тачку најближу тачки $(1,4)$ *.(2001/02. општинско 4-А/3.)*

16. Човек се налази у чамцу на левој обали канала широког $3\ km$. Жели да стигне до куће на десној обали канала, која је од њега удаљена $5\ km$ ваздушном линијом. Он ће довеслати до неког места на другој обали брзином од $6\ km/h$, а затим наставити до куће трчећи брзином од $8\ km/h$. Одредити растојање куће и места до ког треба човек да довесла, да би стигао кући за најкраће могуће време. (Претпоставља се да вода у каналу мирује.)*(2001/02. окружно 4-А/4.)*

17. Шта је веће $\frac{2}{201}$ или $\ln\frac{101}{100}$. Образложити одговор.*(2001/02. републичко 4-А/1.)*

18. Око купе висине h и полупречника основе r, описују се купе са центрима основе у врху дате купе. Одредити висину оне, која има најмању запремину.*(2000/01. окружно 4-Б/3.)*

19. У полулопту полупречника R уписана је правилна четворострана призма максималне запремине, тако да доња основа призме припада основи полулопте, а темена горње основе призме пропадају површи полулопте. Одредити висину призме.*(2004/05. окружно 4-Б/2.)*

20. Наћи минимум функције $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt{x^2 - 10x + 41}$. За које вредности x се достиже тај минимум? *.(2004/05. окружно 4-А,Б/3.)*

21. Израчунати површину правилне четворостране призме запремине $V = 12\sqrt{3}$ код које је збир дужина свих ивица најмањи. *.(2004/05. републичко 4-Б/5.)*

22. Доказати да за реалне бројеве a, b, n, p, такве да је $a > b > 0$ и $p > n$ важи неједнакост: $\frac{a^p - b^p}{a^p + b^p} > \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$.

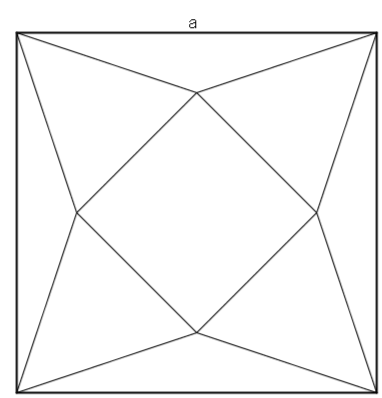
(1999/2000.општинско 4-А/1.)

23. Шта је веће:

а) e^{π} или π^{e}?

б) $\pi^{e^{\pi}}$ или $e^{\pi^{e}}$? *(1999/2000.општинско 4-А/2.)*

24. Из квадратног парчета картона странице a изрезана је мрежа праве правилне четворостране пирамиде (као на слици), тако да јсе, при састављању , темена квадрата састају у врху пирамиде. Колика треба да буде основна ивица пирамиде да би њена запремина била максимална?
(1999/2000.општинско 4-А/3.)



25. Дате су функције $f(x) = arctgx^2$ и

$g(x) = arctg\left(x\sqrt{2} - 1\right) - arctg\left(x\sqrt{2} + 1\right)$, $(x \in R)$. Доказати да је разлика ових функција константа и одредити ту константу. *(1999/2000.републичко 4-Б/3.)*

26. У сферу полупречника $3\ cm$ уписана је купа максималне запремине. Одредити висину и полупречник основе купе. *(1998/1999.општинско 4-Б/5.)*