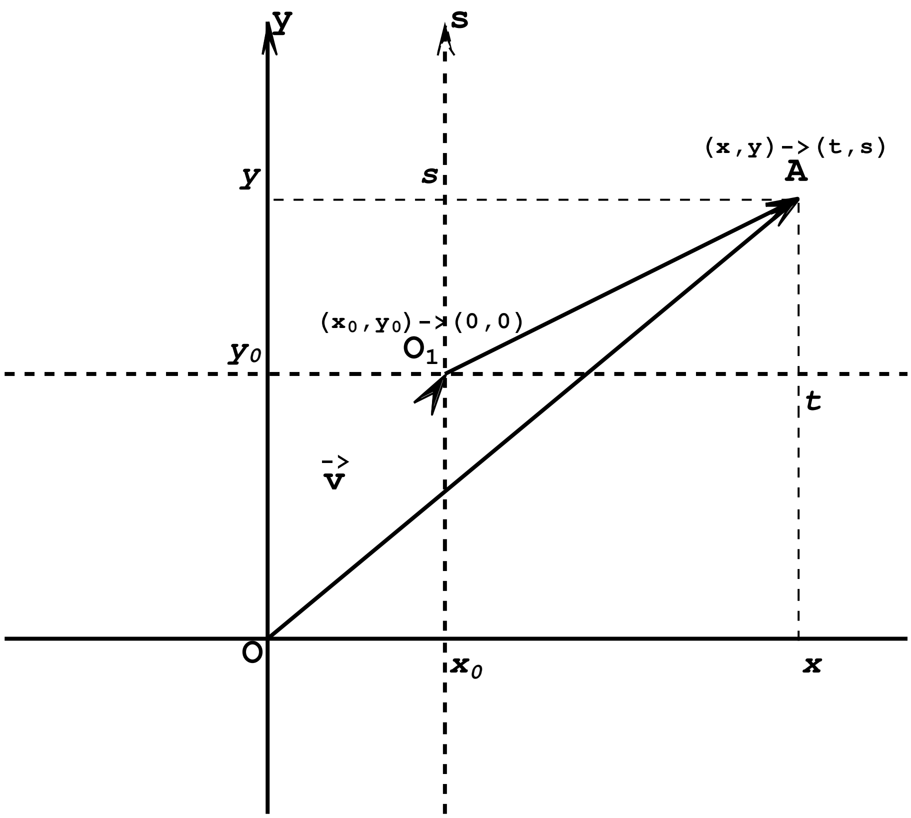
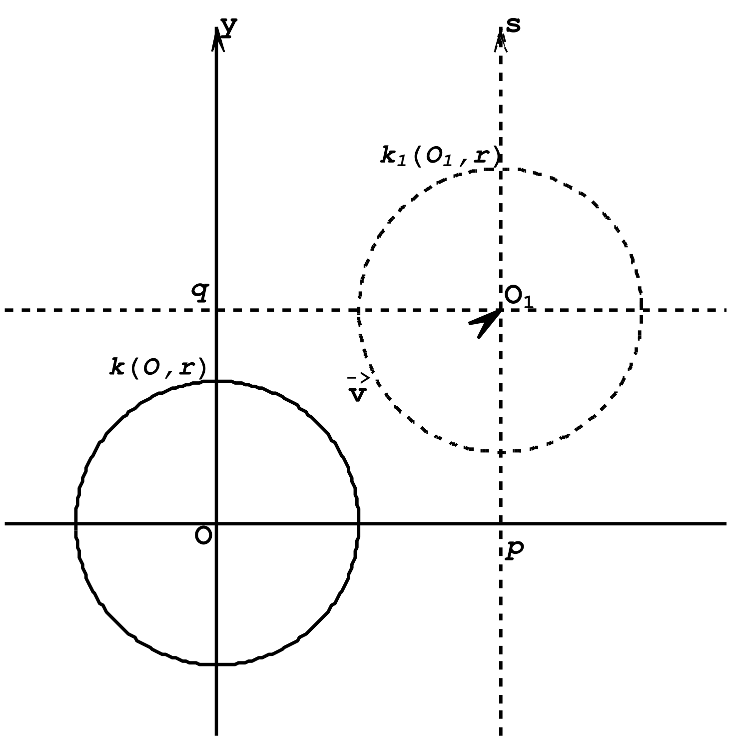
ТРАНСЛАЦИЈА КООРДИНАТНОГ СИСТЕМА



Транслација за вектор
$\vec{v} = \overrightarrow{OO_1} = (x_0, y_0)$

$$\overrightarrow{O_1A} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OO_1}$$
$$\Downarrow$$
$$(t, s) = (x, y) - (x_0, y_0)$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} t = x - x_0 \\ s = y - y_0 \end{cases}$$



Кружница $k_1(O_1, r)$ описана је различитим једначинама у различитим координатним системима, али због транслације, се једноставно одређује њена једначина при преласку из једног у други систем:

У систему tO_1s, њена једначина је
$$t^2 + s^2 = r^2,$$

али због транслације за вектор
$$\overrightarrow{OO_1} = (p, q)$$
и претходног разматрања важи $\begin{cases} t = x - p \\ s = y - q \end{cases}$,

па у xOy координатном систему једначина прелази у
$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

1. Које криве су представљене следећим једначинама:
   - i) $y^2 - x - 2y - 1 = 0$;
   - ii) $x^2 + 2y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$.

2. Нацртати графике следећих функција:

   i) $y=\sqrt{2x-x^2}$

   ii) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$

   iii) $y=\sqrt{3x+2}$

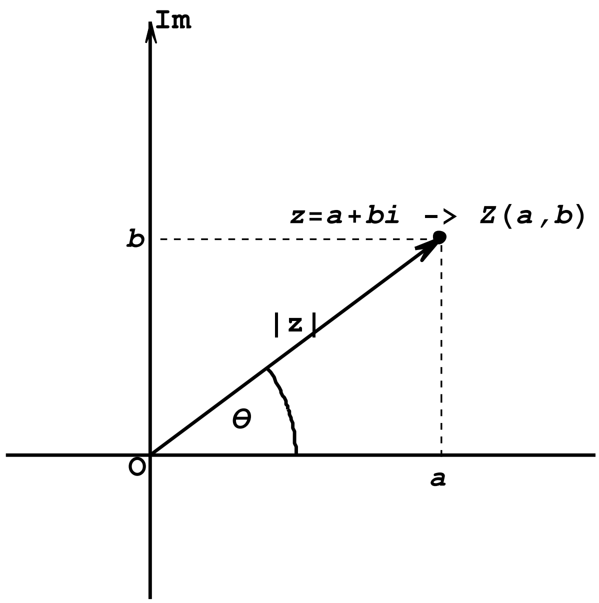
3. Одредити инверзну функцију за функцију:

   i) $f(x)=\sqrt{1-x^2},\ x\in[-1,0],\ 0\le y\le 1;$

   ii) $f(x)=\sqrt{3+2x-x^2},\ x\in[-1,1],\ 0\le f(x)\le 2,$

   и нацртати њен график.

КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ КАО ТАЧКЕ У РАВНИ



АЛГЕБАРСКИ ОБЛИК КОМПЛЕКСНОГ БРОЈА

(положај тачке одређен је растојањима од координатних оса)

$$z=a+bi,\quad \mathrm{Re}(z)=a,\quad \mathrm{Im}(z)=b$$

модуо комплексног броја $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

коњуговано-комплексни број броја $z\to\bar{z}=a-bi$

$$z\cdot\bar{z}=|z|^2$$

ТРИГОНОМЕТРИЈСКИ ОБЛИК КОМПЛЕКСНОГ БРОЈА

(положај тачке одређен је вектором положаја, који је одређен углом који заклапа са позитивним смером Ox-осе и интензитетом)

$$z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),\quad \theta=\arg(z),\quad \rho=|z|$$

множење $\rho_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot\rho_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=\rho_1\rho_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\big)$

дељење $\dfrac{\rho_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\big(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\big)$

Моавров образац (степеновање) $\big(\rho(\cos\theta+i\sin\theta)\big)^n=\rho^n\big(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\big),\ n\in N$

кореновање $\left(\sqrt[n]{\rho(\cos\theta+i\sin\theta)}\right)_k=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right),$ **k=0,1,2,...,n-1**

1. Одредити све комплексне бројеве $z=a+bi$, тј. $z=\rho\left(cos\theta+i\,sin\theta\right)$, који задовољавају релације:
   i) $|z|=5$;
   ii) $|z|\le a,\ a>0$;
   iii) $0<a\le|z|\le b$;
   iv) $|z-z_0|=a$, где је $z_0=a_0+b_0i$ дати комплексан број;
   v) $|z-z_0|\le a$, где је $z_0=a_0+b_0i$ дати комплексан број
   vi) $Re(z)=a$, $(Im(z)=a)$;
   vii) $a\le Re(z)<b$, $(a\le Im(z)<b)$;
   viii) $\theta=\frac{\pi}{6}$;
   ix) $\pi\le arg(z)\le\frac{7\pi}{6}$.
2. Дато је пресликавање $f(z)=\frac{z-i}{z+i}$ (z је комплексан број различит од $-i$). Ако је H подскуп комплексне равни задат са $H=\left\{z\middle|Im(z)>0\right\}$, одреди скуп свих слика елемената из H при датом пресликавању.
3. Дати су скупови $A=\left\{z\in C\middle|\ |z+1|=|z-i|\right\}$ и $B=\left\{z\in C\middle|\ |z-5|=2\right\}$. Одредити најмању вредност израза $|z_1-z_2|$, док $z_1\in A$ и $z_2\in B$.
4. Нека је $z_k=cos\frac{2k\pi}{p}+i\,sin\frac{2k\pi}{p}$, $k=0,1,2,...,p-1$, где је p прост број. За $n\in N$ израчунати збир $z_0^n+z_1^n+z_2^n+......+z_{p-1}^n$.
5. У равни су дате две различите тачке A и B. Одредити геометријско место тачака у равни за које важи: $AM\cdot BM\cdot cos\measuredangle AMB=\frac{3}{4}AB^2$.
6. *(општинско 1989/90.-IV/1.)*Дат је комплексан број $z=\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$, $\lambda\in R$. Доказати да је $z^n+\overline{z^n}=2cos\left(2n\cdot arctg\lambda\right)$.
7. Одредити најмању вредност функције:
   i) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}+\sqrt{x^2-6x+25}$;
   ii) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+8}+\sqrt{x^2-10x+41}$
8. Нека је $S=\left\{z\in C\middle|Re\left(\frac{z-6i}{z+8}\right)=0\right\}$. Доказати да постоји кружница k у равни комплексних бројева таква да је $S\subset k$. Да ли је $S=k$.
9. Дат је број $z\in C$. Ако је $|z|=1$ и $z\ne1$, доказати да је $Re\left(\frac{z+1}{z-1}\right)=0$.
10. Дати су бројеви $z\in C$, $z\ne1$ и $n\in N$, $n\ge2$. Ако је $z^n=1$, доказати да важи: $1+2z+3z^2+...+nz^{n-1}=\frac{n}{z-1}$.
11. Међу комплексним бројевима z, који задовољавају једнакост $\left|\frac{z-i}{z-2i}\right|=\frac{1}{2}$, одредити онај који има највећи модуо.

12. *(републичко 1998/99.- III-A/2.)* Нека су $z_1,\ z_2$ комплексни бројеви који задовољавају услове $|z_1 - z_2| = 2$ и $z_1 \cdot z_2 = 1$. Доказати да је четвороугао чија темена имају комплексне координате $-1,\ z_1,\ 1,\ z_2$ једнакокраки трапез.

13. *(општинско 1998/99.- IV-Б/4.)* Одредити модуо и аргумент комплексног броја $z = 1 - \cos\frac{10\pi}{9} - i\sin\frac{10\pi}{9}$.