TEOREME O SREDNJOJ VREDNOSTI

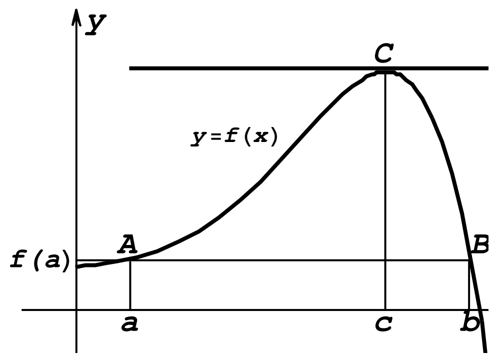
ROLOVA TEOREMA: Ako funkcija $f(x)$ zadovoljava sledeće uslove:

(i) $f(x)$ je neprekidna na intervalu $[a,b]$;

(ii) $f(x)$ je diferencijabilna na intervalu (a,b);

(iii) $f(a)=f(b)$,

tada postoji tačka $c\in(a,b)$, takva da je $f'(c)=0$.



Geometrijsko tumačenje:
Na grafiku funkcije $f(x)$, koja zadovoljava uslove Rolove teoreme, na intervalu (a,b) postoji tačka **C** u kojoj je tangenta grafika paralelna *x*-osi.

ZADACI:

1. Primeni Rolovu teoremu na funkcije:
   a) $f(x)=x^3-4x+1$ na intervalu $[-2,2]$;
   b) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ na intervalu $[-2,2]$,

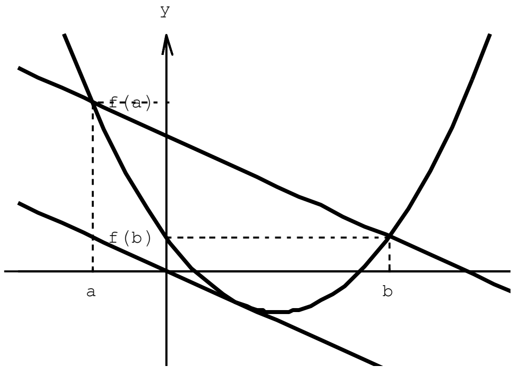
   a zatim odredi vrednosti *c* za koje je $f'(c)=0$. Obrazloži.
2. Dokazati da jednačina $6x^5-5x^4+4x^3-3x^2+2x-1=0$ ima bar jedno rešenje na intervalu (0,1).
3. Dokazati da polinom *P(x)* ima bar jednu nulu na intervalu (0,1):
   a) $P(x)=3x^2-6x+2$;
   b) $P(x)=4x^3+3x^2+2x-3$;
   c) $P(x)=8x^3-3x^2+4x-3$;
   d) $P(x)=5x^4-8x^3-9x^2+2x+3$.
4. Između svake dve nule polinoma *P(x)* postoji bar jedna nula polinoma *P'(x)*. Dokazati.
5. Neka su *f(x)* i *g(x)* diferencijabilne funkcije i neka su *f'(x)* i *g'(x)* neprekidne funkcije na intervalu $[a,b]$. Ako je *f'(x)g(x)-f(x)g'(x)* različito od nule za sve *x* iz intervala $[a,b]$, onda se između svake dve nule funkcije *f(x)* nalazi bar jedna nula funkcije *g(x)* i obrnuto. Dokazati.
6. Dokazati da funkcija *f(x)=asinx+bcosx* ($a,b\in R\setminus\{0\}$), ima bar jednu nulu na svakom intervalu $\left(k\pi,(k+1)\pi\right)$, $k\in Z$.
7. Ako je *f'(x)=af(x)* i *g'(x)=ag(x)*, $a\in R$, pri čemu je $g(x)\neq 0$, onda postoji konstanta *C*, takva da je *f(x)=Cg(x)*. Dokazati.

LAGRANŽOVA TEOREMA: Ako funkcija $f(x)$ zadovoljava sledeće uslove:

(i) $f(x)$ je neprekidna na intervalu $[a,b]$;

(ii) $f(x)$ je diferencijabilna na intervalu (a,b),

tada postoji tačka $c\in(a,b)$, takva da je $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Geometrijsko tumačenje:Na grafiku funkcije $f(x)$, koja zadovoljava uslove Lagranžove teoreme, na intervalu (a,b) postoji tačka u kojoj je tangenta grafika paralelna sečici postavljenoj u krajnjim tačkama intervala.

ZADACI:

1. Odredi sve tačke $c\in(a,b)$, za koje je $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ako je :

a) $f(x)=x^3+1$, $(a,b)=(-2,1)$;

b) $f(x)=|x|$, $(a,b)=(-1,2)$;

c) $f(x)=e^x$, $(a,b)=(0,1)$;

d) $f(x)=\sin x$, $(a,b)=(\frac{\pi}{2},\pi)$.

2. Ako je $0<a<b$, onda je $\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$. Dokazati.

3. Dokazati da je $|\sin b-\sin a|\le|b-a|$.

4. Ako je $a<b$, onda je $\dfrac{b-a}{1+b^2}<arctg\dfrac{b-a}{1+ab}<\dfrac{b-a}{1+a^2}$. Dokazati.

5. Ako je $0<a<b$ i $p>1$, onda je $pa^{p-1}(b-a)\le b^p-a^p\le pb^{p-1}(b-a)$. Dokazati.

Lagranžova teorema je specijalan slučaj **TEJLOROVE TEOREME:**

Ako funkcija $f(x)$ zadovoljava sledeće uslove:

(i) $f(x)$ je *n* puta diferencijabilna na intervalu (a,b),

(ii) $f^{(n-1)}(x)$ je neprekidna funkcija na intervalu $[a,b]$;

onda postoji tačka $c\in(a,b)$, takva da je

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\underbrace{\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c)}_{R}.$$

Ako uvedemo sledeće oznake: ***a=x***, ***b=x+h***, onda je ***x<c<x+h***, te je ***c=x+θh***, gde je ***0<θ<1***, prethodna teorema dobija sledeći oblik:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+\underbrace{\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)}_{R},$$

a primenjuje se za približno izračunavanje funkcija u okolini proizvoljne tačke *x* (za male vrednosti *h*),tj. za aproksimaciju funkcija polinomom, pri čemu je moguće proceniti grešku *R* koja se pri tome javlja.

ZADACI:

1. Proceniti grešku koja se javlja u sledećoim formulama:

a) $\sin x\approx x$;

b) $\sqrt{1+h}\approx 1+\dfrac{1}{2}h$;

c) $\ln(1+x)\approx x,\quad x\in[0,10^{-3}]$

d) $\ln(1+e^x)\approx\ln 2+\dfrac{x}{2},\quad |x|<10^{-2}$

2. Dokazati sledeće nejednakosti:

i) $\sqrt{(1+x)(1+y)} \leq 1+\frac{x+y}{2}, \quad (x>-1,\ y>-1)$

ii) $2\cos\frac{x+y}{2} \geq \cos x+\cos y, \quad \left(|x| \leq \frac{\pi}{2},\ |y| \leq \frac{\pi}{2}\right)$

iii) $2^{\frac{x+y}{2}} \leq 2^{x-1}+2^{y-1}, \quad (x, y \in R)$